

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung und Überblick.....	3
1. Grundlagen und Einschränkungen.....	4
1.1 Definitionen.....	4
1.2 Darstellung von Markovketten.....	5
1.3 Fundamentalmatrix	6
1.4 Anfangsverteilung, spätere Wahrscheinlichkeitsverteilung, Grenzverteilung... 7	
2. Überblick über die Spielbrettmethode nach Arthur Engel.....	8
2.1 Regeln für absorbierende Markovketten.....	8
2.2 Auswertung des Spielergebnisses für absorbierende Markovketten.....	9
2.3 Regeln für nichtabsorbierende Markovketten.....	10
2.4 Auswertung des Spielergebnisses für nichtabsorbierende Markovketten.....	11
3. Implementierung als Computerprogramm.....	12
3.1 Verwendeter Zahlenraum zur Darstellung der Übergangsmatrix.....	12
3.2 Darstellung der Topologie des Graphen.....	13
3.3 Übersicht über das Simulationsprogramm.....	13
3.3.1 Der Spielsimulator.....	14
3.3.2 Spielverlauf.....	14
3.3.3 Der Spielbrett-editor.....	15
3.4 Beispiele.....	16
4. Überlegungen zur Konvergenz der Spielbrettmethode.....	17
4.1 Konvergenzverhalten des Problems „Soziale Beweglichkeit“.....	17
4.2 Konvergenzverhalten des “Crap”-spiels.....	19
5. Korrektheit der Spielbrettmethode.....	23
Literaturverzeichnis.....	24
Anhang.....	25
Der Hauptsatz für absorbierende Markovketten für die Spielbrettmethode.....	25

GYMNASIUM GRAFING

KOLLEGSTUFE 2005/2007

Leistungskurs Mathematik

Facharbeit

Markovketten: Der Übergangsgraph als Spielbrett

Verfasser: Fritz Gerneth

Kursleiter: Gerhard Linke

Abgabetermin: 26.01.2007

Bewertung: Note schriftl: Punkte:

 Note mündl: Punkte:

Unterschrift des Kursleiters:

0. Einleitung und Überblick

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelte Andrej Andrejewitsch Markov (1856-1922) die Idee der nach ihm benannten Markovketten. Markovketten führten lange Zeit ein Schattendasein als mathematische Spielerei ohne praktische Anwendung, doch mit Verbreitung der Computertechnologie wurden Markovketten wichtige Werkzeuge in vielen technisch-wissenschaftlichen Bereichen wie zum Beispiel Molekularbiologie, Genetik, Wettervorhersage, Spracherkennung und Simulation von wirtschaftlichen Abläufen.

1974 stellte Arthur Engel einen neuen Ansatz zur Modellierung von Markovketten vor. Er fasst eine Markovkette als Spielbrett auf, auf dem mit Steinen gespielt wird, mit Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten als Spielergebnis. In [1] skizziert Engel die Grundlagen des Spiels. Diese Facharbeit greift die Idee Engels auf und untersucht sie tiefergehend. Einen wesentlichen Bestandteil bildet die Umsetzung der Engelschen Spielbrettmethode in ein grafisch animiertes Computerprogramm. Die monotone Aufgabe des Bewegens von Spielsteinen erledigt jetzt der Computer und man kann nun spielerisch leicht auch mit komplexeren Markovketten experimentieren und ihre Mechanismen erforschen.

In Kapitel 1 werden zunächst die mathematischen Grundlagen der Markovketten zusammengefasst. Dabei wird vieles für die Spielbrettmethode unwesentliche weggelassen. Einschränkungen auf bestimmte Arten von Markovketten werden erläutert.

Kapitel 2 erklärt die Spielregeln der Spielbrettmethode.

In Kapitel 3 wird das Computerprogramm vorgestellt. Es wird die Darstellung von Spielbrett, Spielgraph und Spielsteinen erklärt. Das Kapitel führt außerdem durch die Benutzeroberfläche und Spielmöglichkeiten. Das Programm selbst kann unter der URL <http://www.gerneth.com/markov/> aufgerufen werden.

Kapitel 4 demonstriert die Spielbrettmethode an zwei ausgewählten Beispielen aus [1], vergleicht die Ergebnisse mit herkömmlich berechneten Lösungen und untersucht das Konvergenzverhalten der Spielbrettmethode für diese beiden Fälle.

Kapitel 5 stellt Überlegungen zur Korrektheit der Spielbrettmethode an und gibt einen Überblick über Beweise in weiterführender Literatur zur Spielbrettmethode.

1. Grundlagen und Einschränkungen

1.1 Definitionen

Die Grundidee von Markovketten lässt sich einfach am Beispiel eines Käfers zeigen, der zufällig über eine Tischplatte krabbelt. Die Position des Käfers nennen wir *Zustand*; die Menge aller Zustände wird als Zustandsraum bezeichnet, in diesem Fall die X/Y-Koordinaten des Käfers auf der Tischplatte. Markovketten sind ein geeignetes Mittel um den *Zufallsprozeß* (Folge von Zufallsexperimenten) der Bewegung des Käfers im *Zustandsraum* über einen *Zeitparameter* zu modellieren. Ein Zufallsprozeß durchläuft also eine Folge von Zuständen, ausgehend von einer vorgegebenen Anfangsverteilung.

Wir beschränken uns auf Markovketten mit folgenden speziellen Eigenschaften:

- diskreter und endlicher Zustandsraum. Durch geeignete Modellierung lässt sich ein eigentlich kontinuierlicher Zustandsraum diskretisieren; durch Einschränkung des Wertebereichs kann man Endlichkeit erzwingen.
- diskreter Zeitparameter: auch die Zeit verläuft in unseren Markovexperimenten nicht kontinuierlich sondern in nummerierten Schritten $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- Gedächtnislosigkeit: zukünftige Zustände hängen nur vom momentanen, nicht aber von vorausgegangenen Zuständen ab. Solche Markovketten heißen auch Markovprozesse erster Ordnung (im Gegensatz zu Markovprozessen höherer Ordnung, die auch die Vergangenheit betrachten).
- Zeitinvarianz: die Ereigniswahrscheinlichkeiten ändern sich nicht über den betrachteten Zeitraum.

Auf das Beispiel des Käfers bezogen bedeutet das: Die Tischplatte wird in endlich viele Felder (Zustandsraum $\{1, \dots, N\}$) unterteilt. Der Zustand des Käfers bezeichnet das Feld, auf dem er sich gerade aufhält. Der Käfer krabbelt nicht konstant, sondern bewegt sich pro Zeitintervall (*Schritt*) einmal. Die kommende Bewegung des Käfers hängt nur von seinem derzeitigen Zustand ab. Die Wahrscheinlichkeit für eine Bewegung von einem Feld auf ein anderes hängt nicht davon ab, wie lange der Käfer bereits unterwegs ist.

Eine solchermaßen beschränkte zeitinvariante, diskrete, endliche Markovkette erster Ordnung ist definiert über den Zustandsraum, die Anfangsverteilung und die

Übergangswahrscheinlichkeiten:

Sei $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ eine Folge von diskreten Zufallsvariablen die alle Ausprägung in einer endlichen Menge S haben.

S heißt Zustandsraum und $s \in S$ ein Zustand

X heißt Markov-Kette, falls

$$P(X_n = s | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = s | X_{n-1} = x_{n-1})$$

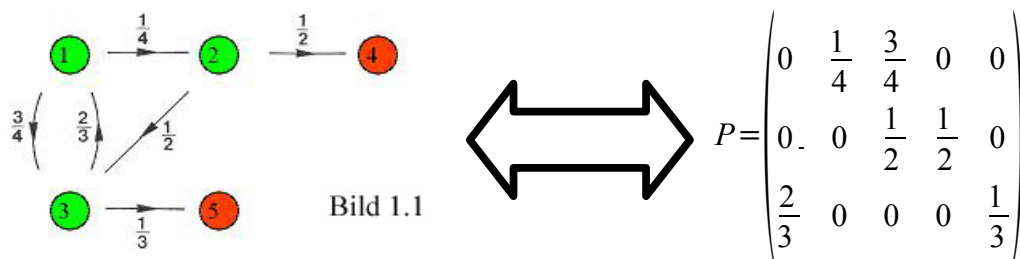
für alle $n \geq 1$ und alle $s, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in S$.

1.2 Darstellung von Markovketten

Markovketten lassen sich als Übergangsgraphen oder in Matrixform darstellen.

Zur Darstellung als Übergangsgraphen werden die Zustände in Kreisen (*Knoten*) mit dem Namen des Zustands dargestellt; durch Pfeile werden die Übergänge deutlich gemacht. Die Pfeile werden entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeit beschriftet.

Beispiel: Engel, Seite 212, Fig. 14.12



Ausweglose Zustände wie in diesem Beispiel die Knoten 4 und 5 heißen *absorbierend*. Die Menge der absorbierenden Zustände heißt der *Rand* des Graphen. Die Menge der nichtabsorbierenden Zustände wird das *Innere* des Graphen genannt. Die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten an den von einem inneren Zustand abgehenden Pfeilen muß 1 sein.

Zum Rechnen ist es einfacher, die Übergangswahrscheinlichkeiten in Matrix-form darzustellen. Die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i nach Zustand j wird im j -ten Element der i -ten Zeile der Matrix angegeben. Die Summe der Elemente einer Zeile muß immer den Wert 1 ergeben (stochastische Matrix).

Eine Markovkette mit absorbierenden Zuständen heißt *absorbierende Markovkette*; im Gegensatz zu einer *nichtabsorbierenden Markovkette*. Für absorbierende Markovketten

ist es vorteilhaft und üblich (und für die Matrixdarstellung notwendig) die absorbierenden Zustände zuletzt aufzuführen.

1.3 Fundamentalmatrix

Die Übergangsmatrix P lässt sich unterteilen in eine quadratische Teilmatrix Q , die die Übergänge zwischen inneren Zuständen beschreibt und eine im allgemeinen nicht-quadratische Restmatrix S , die die Wahrscheinlichkeiten für absorbierende Zustandsübergänge beschreibt:

$$(1.1) \quad P = (Q, S)$$

Für absorbierende Markovketten ist es oft praktischer statt mit der Matrix Q mit der *Fundamentalmatrix* zu rechnen. Die Elemente t_{ij} der Fundamentalmatrix lassen sich veranschaulichen als die mittlere Anzahl der Besuche in einem Zustand j bei Start in i , bevor ein absorbierender Zustand erreicht wird. Die Fundamentalmatrix hat die selben Abmessungen wie Q , ist also ebenfalls quadratisch.

Engel beweist in [1] S. 193 dass sich die Fundamentalmatrix aus Q herleiten lässt nach der Formel

$$(1.2) \quad T = (I - Q)^{-1}$$

Aus der Fundamentalmatrix lässt sich leicht die mittlere Schrittzahl bis zur Absorption bei Start in i bestimmen. Nachdem t_{ij} die mittlere Verweildauer im Zustand j angibt, muss man lediglich die Summe über alle Zustände bilden.

$$(1.3) \quad m_i = \sum_j t_{ij}$$

Aus der Fundamentalmatrix lässt sich bequem die Wahrscheinlichkeit a_{ij} der Absorption in Zustand j bei Start in i berechnen. Die Elemente a_{ij} lassen sich zu einer Matrix zusammenfassen. Engel zeigt in [1] S. 194, dass gilt

$$(1.4) \quad A = TS$$

Die Absorptionsmatrix A lässt sich veranschaulichen als ein Satz von Zeilenvektoren

\vec{a}_i . Für jeden Startzustand i beschreibt \vec{a}_i den Vektor der Absorptionswahrscheinlichkeiten in den absorbierenden Knoten. (1.2) und (1.4) werden als *Hauptsatz für absorbierende Markovketten* bezeichnet.

1.4 Anfangsverteilung, spätere Wahrscheinlichkeitsverteilung, Grenzverteilung

Um eine Markovkette zu betrachten, benötigt man neben dem Zustandsraum und der Übergangswahrscheinlichkeit die Anfangsverteilung. Die Anfangsverteilung wird dargestellt als normierter Wahrscheinlichkeitsvektor

$$(1.5) \quad \vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_N(0))$$

Spätere Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich ausdrücken durch

$$(1.6) \quad \vec{p}(n) = \vec{p}(n-1) * Q = \vec{p}(0) * Q^n$$

Für nichtabsorbierende Markovketten ist es interessant das langfristige Verhalten zu beobachten, insbesondere ob sich bei einer gewählten Anfangsverteilung ein Gleichgewicht der Zustandswahrscheinlichkeiten einstellt. Wir nennen diese Grenzverteilung *Fixvektor* oder *stationäre Verteilung*. Es gilt:

$$(1.7) \quad \vec{p} = \vec{p} * Q$$

Für ein einzelnes Element p_j des Fixvektors bedeutet dass:

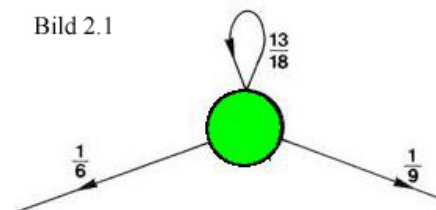
$$(1.8) \quad p_j = \sum_{i=1}^n p_i * q_{ij}$$

In [1] S. 191 beweist Engel, dass der Fixvektor für reguläre Markovketten existiert (regulär: es gibt ein m , so dass P^m lauter positive Elemente hat).

2. Die Spielbrettmethode nach Arthur Engel

Arthur Engel fasst den Graphen einer Markovkette als Spielbrett auf, auf dem mit Steinen gespielt wird.

Beim Spiel werden Steine entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeiten durch den Graphen bewegt. Um einen Spielzug auszulösen ist also eine Mindestanzahl Steine notwendig, die sich aus dem kleinsten gemeinsamen Nenner der Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt. In folgendem Beispiel sind zum Beispiel 18 Steine notwendig um einen Spielzug auszulösen:



Mit dem Spielzug werden 3 Steine dem nach links deutenden Pfeil folgend verschoben, 2 Steine folgen dem rechten Pfeil und 13 Steine kehren sofort wieder in den Knoten zurück.

Ein Knoten gilt als kritisch, wenn er mit einem Stein weniger belegt ist als zum Ziehen notwendig. Im obigen Beispiel sind das 17 Steine.

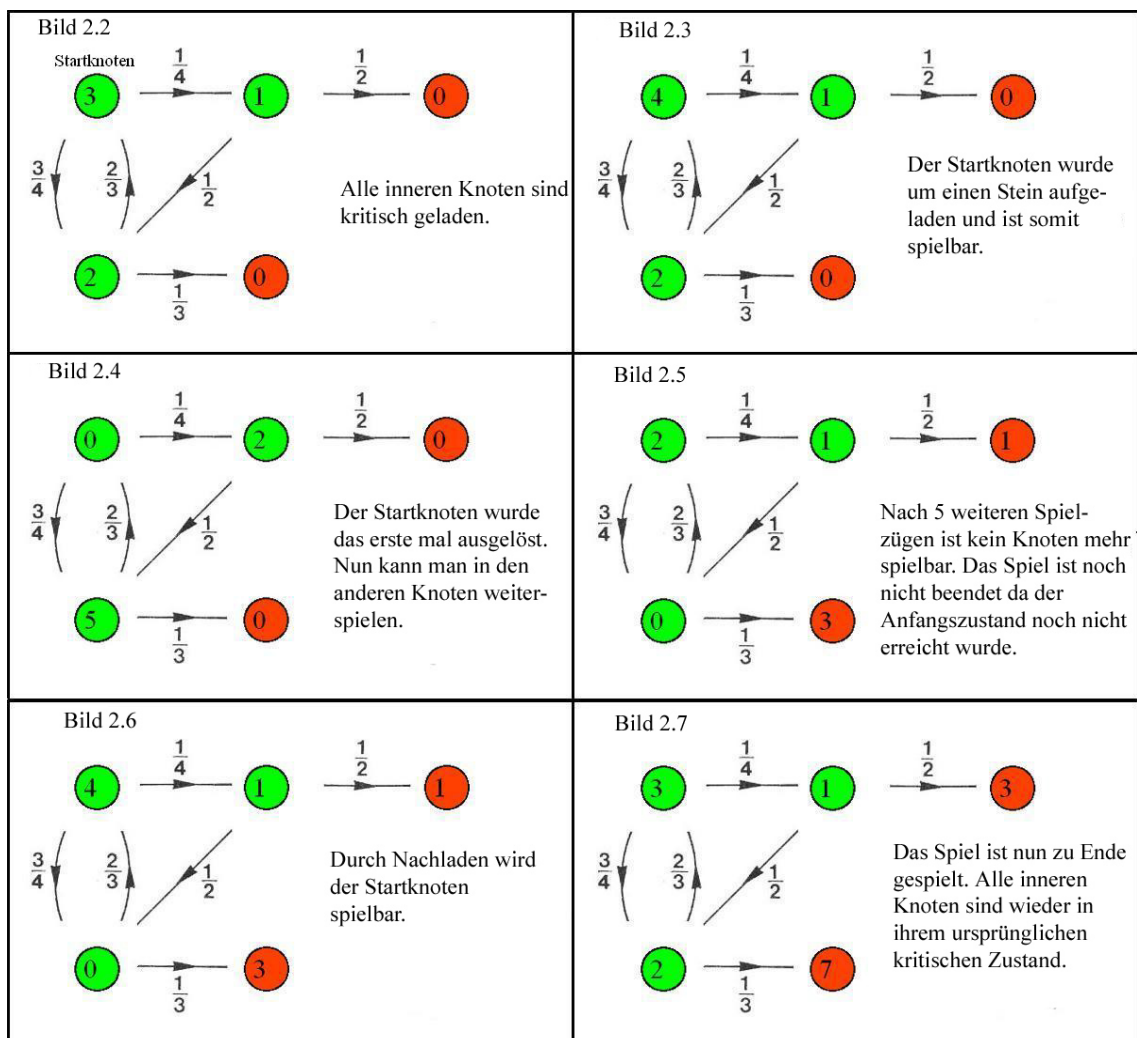
Es gelten verschiedene Spielregeln für absorbierende und nichtabsorbierende Markovketten. Auch die Interpretation des Zustands nach Spielende ist verschieden.

2.1 Regeln für absorbierende Markovketten

Für absorbierende Markovketten stellt Engel folgende Spielregeln auf:

- Vor Spielbeginn wählt man einen inneren Knoten als Startknoten aus. Für die Anfangsverteilung der Markovkette heißt das, der Startknoten hat die Wahrscheinlichkeit 1 und alle anderen die Wahrscheinlichkeit 0.
- Alle inneren Knoten werden kritisch aufgeladen (Bild 2.2).
- Nun legt man einen zusätzlichen Stein in den Startknoten so dass dieser spielbar wird (Bild 2.3).

- Jetzt werden in beliebiger Reihenfolge spielbare Knoten ausgelöst, bis kein Knoten mehr spielbar ist. Dadurch werden möglicherweise weitere Knoten spielbar; auch diese müssen in dieser Runde berücksichtigt werden (Bilder 2.4, 2.5). Zur späteren Auswertung zählt man pro Knoten die Anzahl der Steine die insgesamt in den Knoten hineinverschoben werden.
- Im Startknoten wird nun nachgeladen bis dieser wieder kritisch geladen ist (Bild 2.6). Dabei zählt man die Anzahl der Steine die insgesamt nachgeladen werden.
- Die beiden letzten Schritte werden solange wiederholt bis die Startverteilung wieder auftritt, d.h. alle inneren Knoten kritisch geladen sind (Bild 2.7).



2.2 Auswertung des Spielergebnisses für absorbierende Markovketten

Als Ergebnis des Spiels ergeben sich für absorbierende Markovketten

Wahrscheinlichkeiten der Endzustände, durchschnittliche Weglänge und, daraus resultierend, die Fundamentalmatrix.

Für die Absorbtiionswahrscheinlichkeit im absorbierenden Knoten j vom Startknoten i gilt dabei:

$$(2.1) \quad t_{ij} = \frac{\text{Anzahl der in } j \text{ absorbierten Steine}}{\text{Anzahl insgesamt absorbierter Steine}}$$

Für die mittlere Weglänge vom Startzustand i bis zur Absorbtion gilt:

$$(2.2) \quad m_i = \frac{\text{Gesamte Anzahl der Bewegungen}}{\text{Anzahl insgesamt absorbierter Steine}}$$

Die mittlere Anzahl der Besuche im inneren Knoten j bei Start in i ergibt sich zu:

$$(2.3) \quad t_{ij} = \frac{\text{Anzahl der in } j \text{ hineinbewegten oder nachgeladenen Steine}}{\text{Anzahl insgesamt absorbierter Steine}}$$

Daraus ergibt sich dann die i -te Zeile der Fundamentalmatrix:

$$(2.4) \quad T = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{i1} & t_{i2} & \dots & t_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Aus der Verteilung der absorbierten Steine in Bild 2.7 läßt sich für den gewählten Startknoten unschwer der Vektor der Absorbtiionswahrscheinlichkeiten

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \right) \text{ ablesen. Für dieses Beispiel werden in die Knoten 1, 2, 3 je 14, 6,}$$

21 Steine hineinbewegt oder nachgeladen (nicht aus Bild ersichtlich), d.h. unter Berücksichtigung der zusätzlichen 10 Bewegungen in absorbierende Knoten insgesamt 51 Bewegungen. Daraus ergibt sich eine mittlere Schrittzahl bis zur Absorption von 5,1.

Die erste Zeile der Fundamentalmatrix läßt sich nun leicht bestimmen als

$$\vec{t} = \left(\frac{12}{5}, \frac{3}{5}, \frac{21}{10} \right) .$$

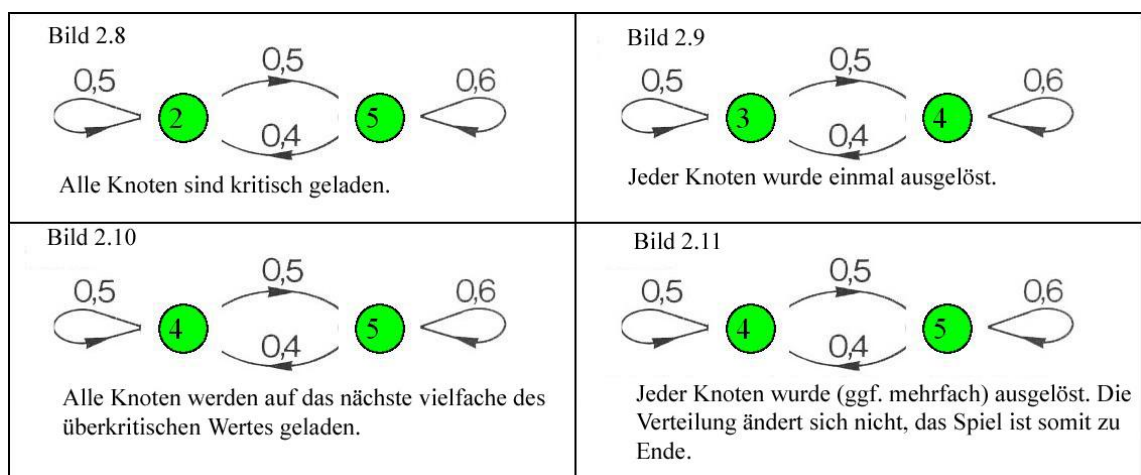
2.3 Regeln für nichtabsorbierende Markovketten

Für nichtabsorbierende Markovketten entwickelte Engel einen anderen Satz Regeln:

- Wir beginnen mit einem leeren Spielfeld.
- Nun wird jedes Feld soweit nachgeladen, dass man im Verhältnis der

Übergangswahrscheinlichkeiten ziehen kann (Bild 2.8). Im Spielverlauf können sich auch ganzzahlige Vielfache der ursprünglichen Belegung ergeben. Hat ein Feld z.B. zwei abgehende Pfade mit den Wahrscheinlichkeiten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und ist bereits mit drei Steinen belegt, so wird ein weiterer Steine ergänzt um auf das nächste Vielfache von zwei Steinen zu gelangen (Bild 2.10).

- Anschließend wird in jedem Feld gleichzeitig gezogen und alle Steine vollständig weiterverteilt (Bild 2.9). Dabei gelangen Steine von anderen Feldern auf dieses Feld; diese dürfen jedoch beim Ziehen nicht berücksichtigt werden. Ändert sich die Gesamtverteilung der Steine in diesem Schritt nicht, so ist das Spiel beendet (Bild 2.11). Ansonsten werden die beiden letzten Schritte wiederholt.



2.4 Auswertung des Spielergebnisses für nichtabsorbierende Markovketten

Aus der Verteilung der Steine nach Spielende lässt sich durch Normierung der Fixvektor berechnen. Das i -te Element des Fixvektors berechnet sich folgendermaßen:

$$(2.5) \quad p_i = \frac{\text{Anzahl der Steine in Knoten } i}{\text{Gesamtanzahl der Steine}}$$

Aus der Verteilung in Bild 2.11 lässt sich einfach der Fixvektor $\vec{p} = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$ bestimmen.

3. Implementierung als Computerprogramm

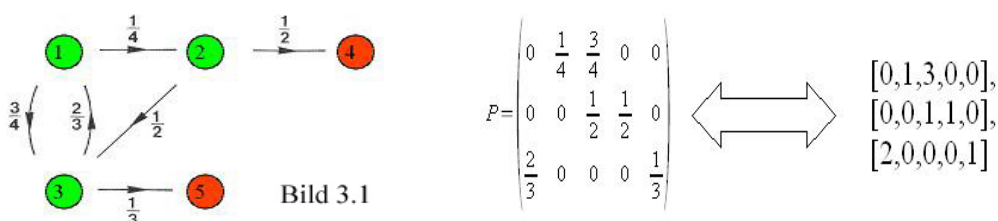
Einen wesentlichen Bestandteil der Facharbeit bildet die Umsetzung der Engelschen Spielbrettmethode in ein grafisch animiertes Computerprogramm. In diesem Kapitel wird das Computerprogramm vorgestellt. Zunächst wird die Entscheidung für den Einsatz rationaler Zahlen begründet und der Zähler als Anzahl der Spielsteine interpretiert. Anschließend wird die Darstellung von Spielbrett, Spielgraph und Spielsteinen erklärt. Das Kapitel führt außerdem durch die Benutzeroberfläche und Spielmöglichkeiten und zeigt fortgeschrittene Funktionen wie den Graphen-Editor.

3.1 Verwendeter Zahlenraum zur Darstellung der Übergangsmatrix

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind (in den meisten Fällen einfache) Dezimalbrüche oder Brüche. Für irrationale Wahrscheinlichkeitswerte ist die Spielbrettmethode nicht anwendbar, da sie nicht auf eine endliche Anzahl von Spielsteinen abbildbar sind. Um Rundungsfehler zu vermeiden ist es erforderlich Wahrscheinlichkeiten exakt darzustellen. Hierfür wurde der rationale Zahlenraum zur Darstellung gewählt, dargestellt durch ganzzahlige Brüche. Die Begrenzung auf dem vom Computer darstellbaren Bereich $\{0, 1, \dots, 2^{32} - 1\}$ stellt in der Praxis keine Einschränkung dar.

Die Übergangsmatrix hat nichtnegative Elemente und die Zeilensumme 1 (stochastische Matrix). Diese Eigenschaft lässt sich zur weiteren Vereinfachung der Matrixdarstellung ausnützen: alle Brüche einer Zeile werden auf den selben Nenner gebracht. Der Nenner selbst muss dann nicht abgespeichert werden, weil er sich jederzeit als Summe aller Zähler neu berechnen lässt. Die Übergangsmatrix zu diesem Graphen und ihre Darstellung in JavaScript ergeben sich als:

Beispiel: Engel, Seite 212, Fig. 14.12



Diese Darstellung vermeidet nicht nur Rundungsfehler sondern stellt sich auch als sehr vorteilhaft für die Spielbrettmethode heraus. Die Matrixelemente lassen sich interpretieren als Anzahl der Spielsteine die bei einem Spielzug bewegt werden. Ein Knoten ist kritisch geladen wenn sein Wert eins niedriger ist als die Summe der entsprechenden Matrixzeile. Zum Beispiel lässt sich oben sofort ablesen dass Knoten 1 den kritischen Wert 3 hat. Soll ein Spielzug in Knoten 1 ausgelöst werden so sind dafür 4 Steine notwendig (Summe der ersten Zeile der Matrix). Ein Stein wird dabei nach Knoten 2 verschoben und 3 Steine nach Knoten 3.

3.2 Darstellung der Topologie des Graphen

Die automatische zweidimensionale Anordnung von Knoten eines Graphen und das Erzeugen und Beschriften der dazugehörigen Übergangspfeile ist eine Aufgabe für professionelle Softwarepakete. In dieser Facharbeit wurde darauf verzichtet und statt dessen ein anderer Ansatz gewählt der fast ohne Komforteinbuße optisch ansprechende Ergebnisse produziert: der Graph muss als Bilddatei bereits vorliegen. Die Knoten werden über das Spielbrett gelegt. Dafür und für die Animation des Spielablaufs müssen nur die X/Y-Koordinaten (in Pixeln) der Knoten bekannt sein, zum Beispiel für einen Graphen mit 5 Knoten:

[74,71,260,71,74,271,458,71,260,271]

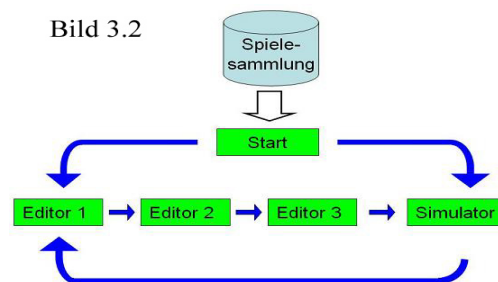
Die Bestimmung der Pixelkoordinaten geschieht interaktiv im Spielbretteditor der im Programm integriert ist.

3.3 Übersicht über das Simulationsprogramm

Das Spielprogramm besteht aus folgenden Komponenten:

- Spielsimulator: Hier wird der Spielverlauf gemäß den Regeln von Engel simuliert und graphisch dargestellt.
- Spielbrett-editor: Damit lassen sich neue Spielbretter erzeugen, oder vorhandene verändern. Das sich ergebende Spielbrett kann in die Spielesammlung übernommen werden; man kann aber auch damit spielen ohne vorher abzuspeichern.
- Die Spielesammlung: Eine Kollektion von Spielbrettern. Graphen aus dieser Sammlung können entweder direkt zum Spielen verwendet werden oder mit dem Editor bearbeitet werden.

Von der Startseite gelangt man nach Wahl eines Spielbretts wahlweise entweder zum Editor oder zum Simulator. Zwischen Editor und Simulator kann man hin- und herwechseln. Die Übergänge zwischen Hauptseite, Editor und Simulator sind im folgendem Diagramm dargestellt. Nicht dargestellt ist die Möglichkeit, jederzeit zur Hauptseite zurückzukehren.



3.3.1 Der Spielsimulator

Im Spielsimulator sind oben die Steuerelemente angeordnet, mit denen der Ablauf der Simulation gesteuert wird. Es folgt das Textausgabefenster; hier erscheint Information über den Ablauf der Simulation und die Analyse der Ergebnisse. Darunter wird das Spielbrett mit dem Übergangsgraphen und der aktuellen Belegung mit Spielsteinen angezeigt.

Zur Darstellung des Übergangsgraphen wird der Zustand der Knoten grafisch animiert auf dem statischen Spielfeld angezeigt. Innere Knoten werden grün, absorbierende Knoten rot gezeichnet. Auf jedem Knoten wird die Anzahl der Spielsteine vermerkt, die sich dort gerade befinden.

3.3.2 Spielverlauf

Es ist möglich per Mausklick Spielsteine auf das Spielbrett zu setzen und einzelne Spielzüge auszulösen. Dieses experimentelle Ausprobieren ist interessant und hilft, die Mechanismen des Brettspiels zu verstehen. Um zu den von Engel beschriebenen Ergebnissen wie mittlere Weglänge, Absorptionswahrscheinlichkeiten, Fundamentalmatrix und Fixvektor zu kommen, ist diese Methode jedoch zu mühsam und fehleranfällig.

Für das automatische Durchrechnen von absorbierenden Markovketten ist folgende Schrittfolge erforderlich:

- Schaltfläche "Zurücksetzen", um einen definierten Anfangszustand (leeres Brett) herzustellen.
- Schaltfläche "Kritisch laden". Alle inneren Knoten erhalten ihren kritischen Wert und werden als kritisch angezeigt (rote Ringe).
- Hinzufügen eines Spielsteins zum Startknoten. Vergewissern Sie sich dass die Mausaktion "Erhöhen" ausgewählt ist und klicken Sie auf das Startfeld. Der Wert erhöht sich um eins; der Knoten wird als spielbar angezeigt (dicke rote Unterlegung).
- Schaltfläche > , >> oder >>> . Das Spiel läuft nun automatisch ab. Bei Bedarf wird nachgeladen. Spielverlauf und Interpretation des Ergebnisses werden im Textausgabefenster protokolliert. Es wird angezeigt, wieviele Steine bewegt wurden (pro Knoten); und es werden die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittlere Weglänge berechnet sowie eine Zeile der Fundamentalmatrix. Um die vollständige Fundamentalmatrix zu gewinnen, müssen diese vier Schritte für jeden inneren Knoten des Graphen wiederholt werden.

Für das automatische Durchrechnen von nicht absorbierenden Markovketten ist folgende Schrittfolge erforderlich:

- Schaltfläche "Zurücksetzen" , um einen definierten leeren Anfangszustand herzustellen.
- Schaltfläche "Überkritisch laden". Alle Knoten werden mit der Anzahl der Steine geladen die erforderlich ist um einen Spielzug auszuführen und werden als spielbar angezeigt.
- Schaltfläche > , >> oder >>>. Das Spiel läuft nun automatisch ab. Abwechselnd werden in allen Knoten Spielzüge ausgelöst oder die Anzahl Steine erhöht um den weiteren Spielablauf zu ermöglichen. Spielverlauf und Interpretation des Ergebnisses werden im Textausgabefenster protokolliert. Nach jeder Runde wird die Verteilung von Spielsteinen angezeigt. Sobald sich ein stabiles Gleichgewicht eingestellt hat wird daraus der Fixvektor berechnet und ausgegeben.

3.3.3 Der Spielbrett-editor

Mit dem Spielbrett-editor ist es möglich, existierende Spielbretter zu verändern oder auch neue Spielbretter zu entwerfen. Beim Erzeugen neuer Spielbretter muß eine

geeignete Vorlage des Graphen bereits als Bilddatei vorliegen. Die Bilddatei kann z.B. von einer Zeichnung eingescannt sein, oder mit einem Zeichenprogramm direkt am Computer erzeugt werden.

Der Editor fragt notwendige Informationen in drei hintereinander folgenden Schritten ab: Eingabe der Basisdaten, Anordnung der Knoten auf dem Spielbrett mittels “Drag & Drop” und Eingabe der Wahrscheinlichkeiten für Zustandsübergänge. Am Ende steht ein fertiges neues Spiel, das sofort gespielt werden kann. Auch eine Aufnahme in die Spielesammlung ist möglich.

Das Programm wird aus Platzgründen hier nur übersichtsweise beschrieben. Eine genauere Beschreibung ist direkt aus der Hauptseite des Programms unter dem Stichpunkt “Spielanleitung” abrufbar.

3.4 Beispiele

Im Lauf der Facharbeit wurde eine Reihe von Beispielen und Aufgaben aus [1] in den Rechner eingegeben und experimentell durchgerechnet. In der Spielesammlung finden sich alle von Engel in Kapitel 14 herangezogenen Beispiele (S. 212-216) sowie die von ihm empfohlenen Beispiele 2, 4, 5, 9 und 10 aus Kapitel 1.4 (S. 22-39). Aus dem selben Kapitel wurden auch besonders schöne Beispielaufgaben hinzugefügt. Weitere Beispielgraphen stammen aus Kapitel 10; dort wurden die Aufgaben 7 und 15 implementiert.

4. Überlegungen zur Konvergenz der Spielbrettmethode

Nicht alle im Rahmen dieser Facharbeit untersuchten Spielszenarien führen schnell zu Ergebnissen. Das „Crap-Spiel“ ([1], S. 36, Aufgabe 17) erfordert z.B. 54-maliges Nachladen des Startzustandes mit insgesamt 990 Steinen, sowie 3342-maliges Verschieben von Steinen. Zur Bewältigung des Problems „Soziale Beweglichkeit“ ([1], S. 185, Aufgabe 7) hat das Simulationsprogram nach 300 Runden zwar mehr als 20000 Steine ins Spiel gebracht, aber noch kein endgültiges Ergebnis erreicht. Das Auftreten längerer Spielzeit ist einleuchtend – die Spielsteine repräsentieren Nenner und Zähler von rationalen Zahlen; bei nichttrivialen Spielergebnissen werden viele Spielsteine zur Ergebnisdarstellung und somit viele Spielrunden gebraucht.

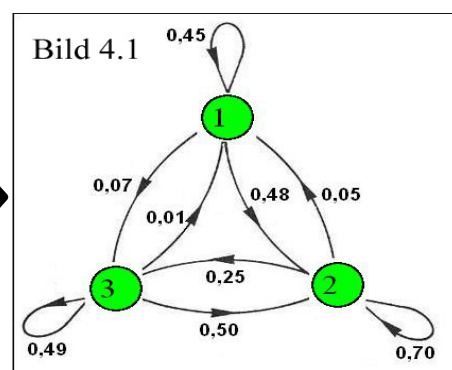
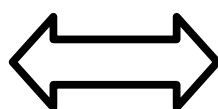
Im folgenden untersuchen wir das Konvergenzverhalten der Spielbrettmethode für nichtabsorbierende und absorbierende Markovketten an den beiden oben erwähnten Beispielen genauer. Wir lösen beide Aufgaben zunächst herkömmlich und überprüfen die Ergebnisse dann mit dem Simulator.

4.1 Konvergenzverhalten des Problems „Soziale Beweglichkeit“

„Soziale Beweglichkeit. In der Soziologie interessiert die Frage in welchem Ausmaß der soziale Status des Vaters den des Sohnes beeinflusst. (...) zeigt die Übergangsmatrix für England und Wales. Die Bevölkerung wurde nach dem Beruf in Ober- Mittel- und Unterschicht (Zustände 1, 2, 3) eingeteilt. (...) Bestimme die stationären Wahrscheinlichkeiten“ ([1], S. 185, Aufgabe 7)

Diesem Problem liegt eine nichtabsorbierende Markovkette zugrunde, die durch die Übergangsmatrix P dargestellt ist. Bild 4.1 zeigt die Übergangsmatrix und die äquivalente grafische Darstellung der Markovkette.

$$P = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,48 & 0,07 \\ 0,05 & 0,70 & 0,25 \\ 0,01 & 0,50 & 0,49 \end{pmatrix}$$



Wir suchen den Fixvektor $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, für den gilt

$$(4.1) \quad \vec{p} = \vec{p} * P$$

Zur Lösung lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,45 * p_1 + 0,05 * p_2 + 0,01 * p_3 \\ p_2 &= 0,48 * p_1 + 0,70 * p_2 + 0,50 * p_3 \\ 1 &= p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben sich durch Anwenden der Gleichung (1.8) in den ersten beiden Knoten des Graphen. Eine erneute Anwendung im dritten Knoten nach dem selben Schema führt allerdings zu einer redundanten Gleichung (weil die Matrix immer stochastisch ist). Stattdessen drückt die dritte Gleichung aus dass der Vektor p normiert ist. Löst man dieses Gleichungssystem (oder lässt es z.B. bei [7] berechnen, s. Bild 4.2), so ergibt sich als Fixvektor

$$\vec{p} = \left(\frac{35}{561}, \frac{1399}{2244}, \frac{235}{748} \right)$$

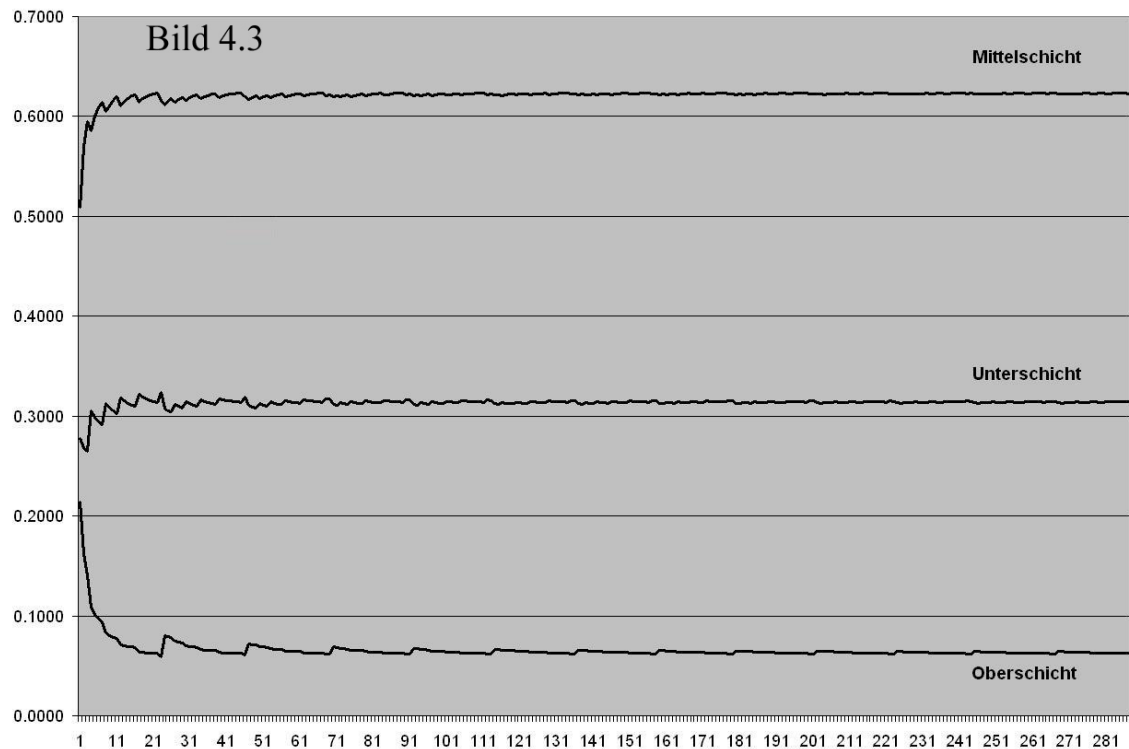
bzw. näherungsweise

$$\vec{p} = (0,0620; 0,6220; 0,3160)$$

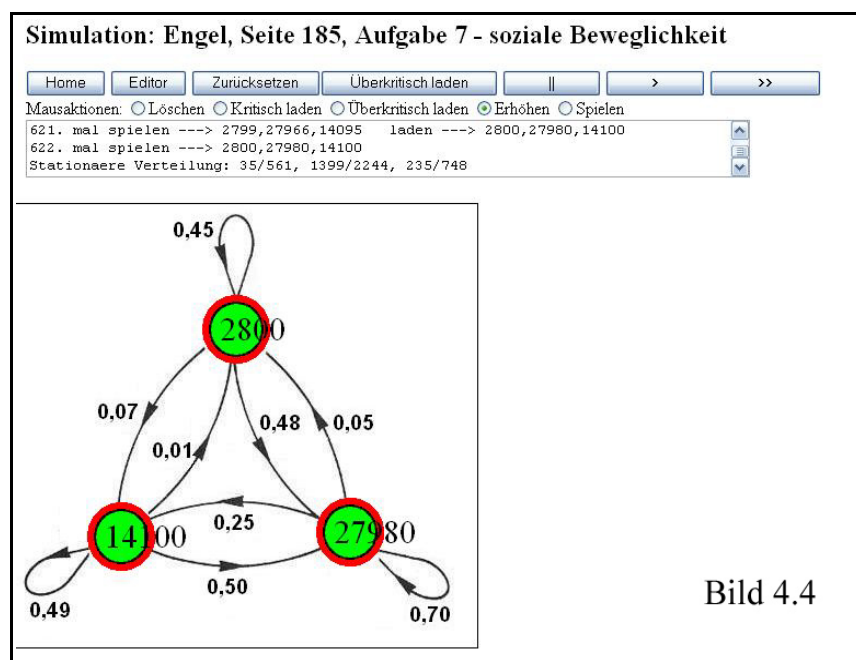


Bild 4.3 zeigt anschaulich, wie sich die Spielbrettmethode im Lauf von 290 Rechenschritten asymptotisch an diese Werte herantastet, aber noch keine Lösung gefunden hat.

Aus dem gemeinsamen Nenner der Elemente der soeben berechneten Lösung ergibt sich, dass zur exakten Darstellung des Fixvektors auf dem Spielbrett 2244 Steine erforderlich sind, oder ganzzahlige Vielfache davon, verteilt im Verhältniss 140:1399:705. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass beim Nachladen immer auf Vielfache der überkritischen Werte geladen wird, in diesem Fall (100, 20, 100). Die Spielbrettmethode wird also nur Lösungen finden, die auch Vielfache von (100,20,100) sind. Das ist erstmals beim 20-fachen der kleinsten Lösung der Fall, mit 2800 Steinen in Knoten 1, 27980 Steinen im Knoten 2 und 14100 Steinen im Knoten 3, also insgesamt 44880 Steinen.



Man braucht viel Geduld und Sorgfalt, um diese Lösung mit einem echten Spielbrett zu ermitteln. Der PC schaffte es im schnellsten Simulationsmodus in wenigen Minuten (Bild 4.4).



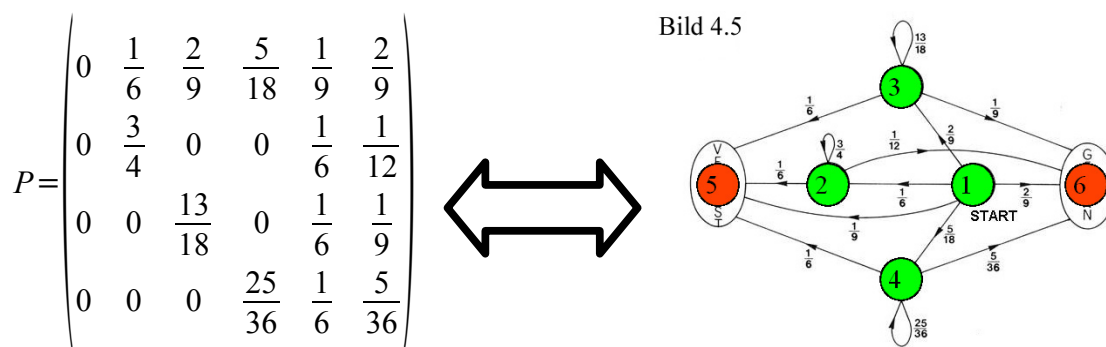
4.2 Konvergenzverhalten des "Crap"-Spiels

„Das Crap-Spiel ist das schnellste und populärste amerikanische Würfelspiel. Die Spielregeln lauten:

1. Rolle 2 Würfel und bestimme die Augensumme S . $S = 7$ oder $S = 11$ gewinnt sofort. $S = 2$ oder $S = 3$ oder $S = 12$ verliert sofort.
2. Bei jeder anderen Summe nenne diese Summe den Punkt P und spiele solange weiter, bis entweder $S = 7$ (ein Verlust) oder $S = P$ (ein Gewinn) erscheint.

(...) Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit und mittlere Spieldauer.“ ([1], S. 36, Aufgabe 17)

Diesem Problem liegt eine absorbierende Markovkette zugrunde, die durch die Übergangsmatrix P dargestellt ist. Bild 4.5 zeigt die Übergangsmatrix und die äquivalente grafische Darstellung der Markovkette.



Für absorbierende Markovketten ist vor allem die Berechnung der Fundamentalmatrix von Interesse. Daraus berechnen wir anschließend die mittlere Weglänge bis zur Absorption und die Absorptionswahrscheinlichkeiten, beides abhängig vom gewählten Startzustand. Wir verwenden Matrizenrechnung um die erwartete Lösung zu bestimmen und überprüfen das Ergebnis anschließend mit der Spielbrettmethode.

Zunächst zerlegen wir die Übergangsmatrix P in zwei Teilmatrizen Q und S .

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

Gemäß der in Kapitel 1 eingeführten Formel $T = (I - Q)^{-1}$ lässt sich aus Q die Fundamentalmatrix bestimmen. Für die Matrizeninvertierung habe ich [8] in Anspruch genommen.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{18} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{36} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{10}{11} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{36}{11} \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente t_{ij} lassen sich anschaulich interpretieren als mittlere Verweildauer. Bildet man die Summe über alle Zustände (d.h. die Summe einer Matrixzeile), so erhält man die mittlere Schrittzahl bis zur Absorbtion beim Start in i . Im Crap-Spiel ist nur Startknoten 1 von Interesse. Für ihn ergibt sich als mittlere Weglänge:

$$m_1 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{10}{11} = \frac{557}{165} \approx 3.38$$

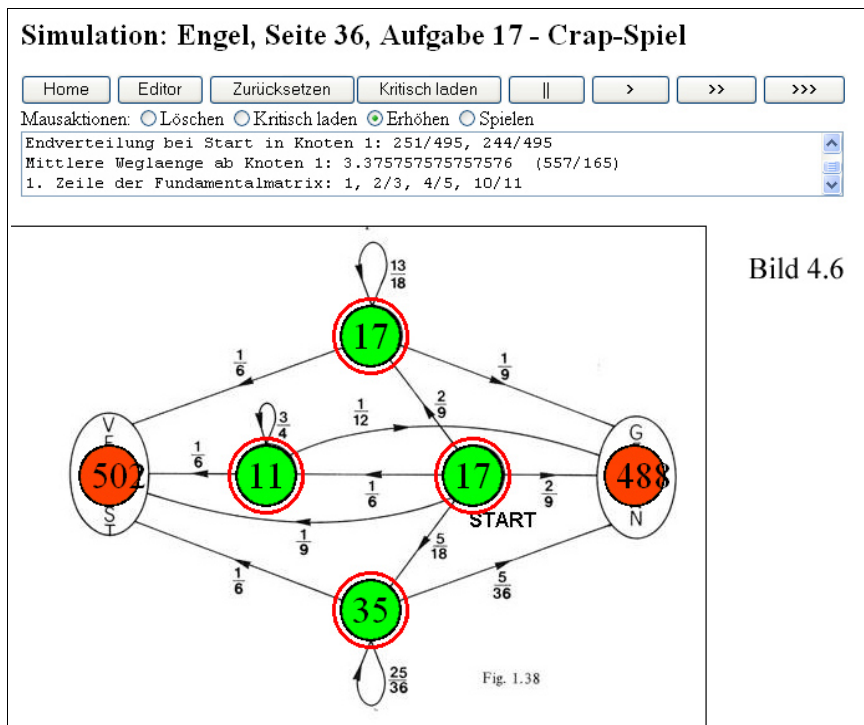
Wesentlich interessanter als die durchschnittliche Spieldauer ist für die meisten Spieler aber die Gewinnchance. Diese wird hier durch die absorbierenden Knoten 5 (Verlust) und 6 (Gewinn) dargestellt. Die Absorbtionswahrscheinlichkeit ergibt sich aus $A=TS$ (siehe Kapitel 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{10}{11} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{36}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{251}{495} & \frac{244}{495} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

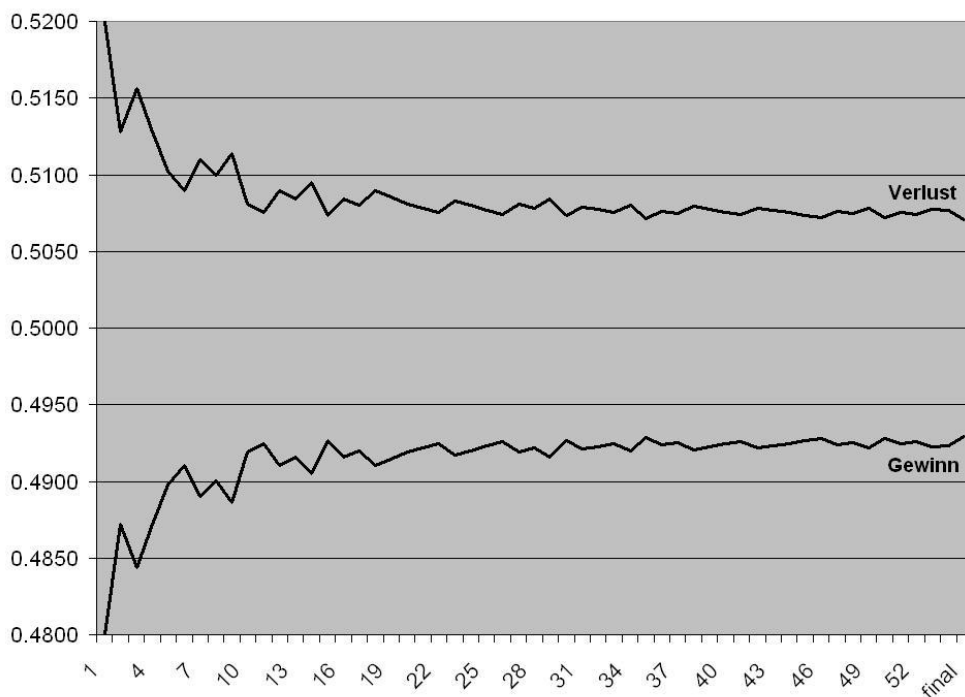
Die Zeile i der Matrix A entspricht den Absorbtionswahrscheinlichkeiten beim Start im Knoten i . Für das Crap-Spiel lesen sich die Gewinn- und Verlustchancen aus der ersten

Zeile von A ab: die Gewinnchance beträgt mit $\frac{244}{495}$ etwas weniger als 50%.

Die Spielbrettmethode gelangt zum selben Ergebnis:



Allerdings braucht man dazu etwas länger. Bild 4.7 zeigt anschaulich, wie sich die Spielbrettmethode im Lauf von 54 maligem Nachladen asymptotisch an diese Werte herantastet und schließlich die Lösung findet.



5. Korrektheit der Spielbrettmethode

Engel liefert in [1] keinen Beweis für die Korrektheit der Spielbrettmethode. In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über verschiedene Beweisideen einschließlich Literaturangaben ohne ins Detail zu gehen.

Für die Korrektheit der Spielbrettmethode bei absorbierenden Markovketten führt Engel in [3] einen Beweis an, der sich am Beweis des Hauptsatzes für absorbierende Markovketten (siehe Kapitel 1) orientiert. Er betrachtet ein kritisch geladenes Spielbrett. Im Startknoten i werden im Lauf des Spieles n Steine nachgeladen. Jedem Stein wird eine Masse $1/n$ zugewiesen sodass die gesamte Eingabe die Masse 1 hat. Am Ende des Spieles hat sich diese Masse auf den Rand des Graphen verteilt, bei unveränderter Massenverteilung im Inneren des Graphen. Diese Umdeutung der Spielsteine in "Wahrscheinlichkeitsmassen" erlaubt es den Beweis des Hauptsatzes für absorbierende Markovketten fast unverändert zu übernehmen. Eine Übersetzung des Beweises aus [3] findet sich im Anhang.

Eine Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Beweises ist die Annahme, dass bei kritischer Startbelegung des Spielbrettes die kritische Belegung wiederkehrt. Man kann sich leicht überlegen dass mindestens eine wiederkehrende Belegung existieren muss: da die Anzahl der möglichen Belegungen endlich ist, muss sich zumindest eine davon bei genügend langen Spiel wiederholen. In [4] zeigt J. Lauri Snell, dass daraus auch folgt, dass die kritische Belegung wiederkehrt.

Für nichtabsorbierende Markovketten kann man sich das schrittweise Erreichen des Fixvektors anschaulich vorstellen als Zu- und Abfluß von Steinen entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeiten. Es muss gelten (siehe [1] S. 178):

$$\text{Zufluß} = \text{Abfluß}$$

Vor jedem Auslösen des Flusses werden wohldosiert Steine nachgelegt. Das ermöglicht proportionales Verteilen der Steine gemäß der Übergangswahrscheinlichkeiten bis sich ein Gleichgewicht einstellt. Außerdem ermöglichen die zusätzlichen Steine ein Verteilungsverhältniss darzustellen das dem tatsächlichen Endergebniss immer näher kommt.

Literaturverzeichnis

- [1] Arthur Engel: "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 2", Klett Studienbücher, Stuttgart 1976
- [2] Arthur Engel: "The probabilistic abacus" aus "Educational Studies in Mathematics 6" S. 1-22, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland 1975
- [3] Arthur Engel: "Why does the probabilistic abacus work?" aus "Educational Studies in Mathematics 7" S. 59-69, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland 1976
- [4] J. Laurie Snell: "The Engel algorithm for absorbing Markov chains", GNU FDL, o.O 1979
- [5] Anette Illgen: "Einführung in die Theorie der Markovketten", Seminarvortrag an der Universität Bremen, Bremen, 2004
- [6] Christian Siegel: "Facharbeit Mathematik: Markov-Ketten", Kirn 2003
- [7] Arndt Brünner: "Rechner zum lösen linearer Gleichungssysteme:
<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>
- [8] Arndt Brünner: "Inverse Matrix berechnen":
<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/inversematrix.htm>

Anhang

Der Hauptsatz für absorbierende Markovketten für die Spielbrettmethode

(Der folgende Beweis findet sich in [3] und wird hier aus dem Englischen übersetzt.
Die Namensgebung wurde dabei an [1] angepasst.)

Es sei:

$$\begin{aligned}
 I &= \{1, 2, \dots, r\} && \text{Menge der inneren Knoten} \\
 R &= \{r+1, r+2, \dots, n\} && \text{Menge der absorbierenden Knoten (Rand)} \\
 P &= (p_{ij}) && i \in I, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ Übergangsmatrix für die Markovkette} \\
 Q &= (q_{ij}) && i, j \in I \text{ Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen inneren Knoten} \\
 S &= (s_{ij}) && i \in I, j \in R \text{ Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten aus I} \\
 &&& \text{nach R} \\
 t_{ij} &= \text{Erwartete Anzahl Besuche in Knoten } j \in I \text{ bei Startknoten } i \in I \\
 T &= (t_{ij}) && i, j \in I \text{ Fundamentalmatrix der Markovkette} \\
 A &= (a_{ij}) = \text{Absorbtionswahrscheinlichkeit in Knoten } j \in R \text{ bei Start in Knoten } i
 \end{aligned}$$

Das Spielbrett wird kritisch geladen und wir wählen einen Startknoten i . Während des Spieles wird eine bestimmte Anzahl Steine in i nachgeladen (Zufluß). Jedem Spielstein wird eine feste gleiche Masse zugewiesen, so dass der Zufluß insgesamt die Masse 1 hat. Am Ende des Spieles hat sich diese Masse auf den Rand R verteilt. Die Massenverteilung im Inneren ist wie am Anfang. Wir betrachten zunächst nur innere Knoten. t_{ij} sei die die Gesamtmasse, die den Knoten j während des Spieles durchfließt. j ist ein innerer Zustand, also fließt die selbe Masse auch wieder ab. Weil sich die Spielsteine entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeiten bewegen, fließt die Masse $t_{ik} * p_{kj}$ von Knoten k nach Knoten j :

$$(A.2) \quad t_{ij} = \sum_{k \in I} t_{ik} * p_{kj}, \quad i \neq j$$

Eine Ausnahme bildet der Startzustand ($j=i$), in dem im Lauf des Spieles zusätzlich die Masse 1 nachgeladen wurde. Hier gilt:

$$(A.3) \quad t_{ij} = 1 + \sum_{k \in I} t_{ik} * p_{ki}$$

Beide Formeln lassen sich zusammenfassen zu:

$$(A.4) \quad t_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k \in I} t_{ik} * p_{kj}, \quad i, j \in I, \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} T &= I + TQ \\ T(I - Q) &= I \end{aligned}$$

$$T = (I - Q)^{-1}$$

Vergleicht man diese Formel mit (1.2) so erkennt man die Formel für die Fundamentalmatrix wieder. Somit erhalten wir also auch die korrekten Erwartungswerte für die Schrittzahl bis zur Absorption, da diese die Summe einer Zeile aus T ist.

Jetzt betrachten wir die absorbierenden Knoten. Es sei $i \in I$ der Startknoten und $j \in R$ ein absorbierender Knoten. Wir nehmen an, dass von der in Knoten i nachgeladenen Masse 1 die Masse a_{ij} nach Knoten j fließt. Es gilt:

$$(A.6) \quad a_{ij} = \sum_{k \in I} t_{ik} * p_{kj}, \quad i, k \in I, j \in R$$

oder in Matrixschreibweise:

$$(A.7) \quad A = TS$$

Vergleicht man diese Formel mit (1.4) so sieht man, dass die in einen absorbierenden Knoten j zufließende Masse korrekt die Absorptionswahrscheinlichkeit in Knoten j wiedergibt.

Wir fassen diese Wahrscheinlichkeit im *Hauptsatz für absorbierende Markovketten nach der Spielbrettmethode* zusammen:

Es sei t_{ij} die erwartete Anzahl Besuche in Knoten $j \in S$ mit Startknoten $i \in I$ und es sei m_i die erwartete Anzahl Schritte bis zur Absorption bei Start in Knoten i. Dann gilt:

$$(A.8) \quad t_{ij} = \frac{\text{Anzahl Besuche in Knoten } j}{\text{Anzahl der in } i \text{ nachgeladenen Steine}}$$

$$(A.9) \quad \begin{aligned} m_i &= \sum_{j \in I} t_{ij} = \frac{\text{Summe aller Besuche in allen inneren Zuständen}}{\text{Anzahl der in } i \text{ nachgeladenen Steine}} \\ &= \frac{\text{Gesamtanzahl der Schritte}}{\text{Anzahl der in } i \text{ nachgeladenen Steine}} \end{aligned}$$

Ich erkläre hiermit, daß ich die Facharbeit ohne fremde Hilfsmittel angefertigt habe und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe

....., den

(Ort)

(Datum)

.....

Unterschrift des Schülers